16) a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad F(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$

$Y' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$

Busco las sol. del homogéneo:

$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -3 & \lambda+2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 1$

Autoval. $\rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Para $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \to 3F1 - F2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -x + y = 0 \rightarrow x = y$

$\rightarrow \bar{X} = x\underbrace{(1,1)}_{\substack{\text{AUTOVECT.} \\ \lambda = 1.}}$

Para $\lambda = -1$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \to F1 - F2} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -3x + y = 0 \rightarrow y = 3x$

$\rightarrow \bar{X} = x \cdot \underbrace{(1,3)}_{\substack{\text{AUTOVECT.} \\ \lambda = -1.}}$

$$\boxed{\text{Sol. H} = k_1 \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Y' = AY + F(t) \to Y' = QDQ^{-1}X + F(t)$$

$$\to Q^{-1}Y' = DQ^{-1}Y + Q^{-1}F(t) \to X = Q^{-1}Y \to X' = DX + G(t)$$

con $G(t) = Q^{-1}F(t)$

$$G(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + e^{3t} \\ x_2' = -x_2 \end{cases}$$

Busco sol. ~~particular~~ para estas nuevas variables:

$$x_{P_1} = c \cdot e^{3t}$$

$$3ce^{3t} - ce^{3t} = e^{3t}$$

$$\to e^{3t} \cdot \underbrace{(3c - c)} = e^{3t}$$

$$3c - c = 1$$

$$\to 2c = 1 \to c = 1/2$$

$$\to x_{P_1} = \frac{1}{2} \cdot e^{3t}.$$

$$x_{H_1} = C_1 \cdot e^t$$

$$\to \boxed{x_{T_1} = c_1 e^t + \frac{1}{2} e^{3t}}$$

Para la segunda son solo las homogeneas:

$$\boxed{X_{T2} = c_2 \cdot e^{-t}}$$

Volviendo a cuando cambié variables:

$$Y = Q X$$

$$\to Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} \\ c_2 \cdot e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\to Y = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t} + 3c_2 e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\to Y_T = c_1 e^{t} + \frac{1}{2} e^{3t}}$$

$$\boxed{Y_T = \underbrace{c_1 e^{t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{Y_H} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Y_P}}$$